

Computer-Graphik I

Baryzentrische Koordinaten

G. Zachmann

University of Bremen, Germany

cgvr.informatik.uni-bremen.de

- Def.: **affin unabhängig**

Geg.: $k+1$ Punkte $P_i \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq i \leq k$. Seien dadurch k Vektoren v_i definiert: $v_i := P_i - P_0$, $i = 1, \dots, k$

Die Punkte P_i heißen **affin unabhängig** \Leftrightarrow die Vektoren v_i linear unabhängig sind.

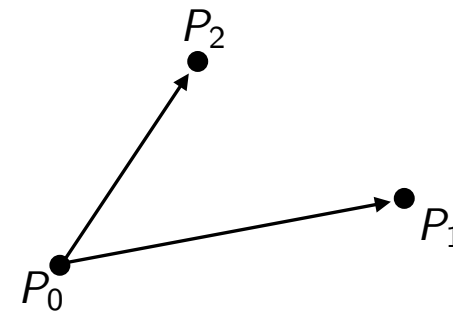
- Beispiel:

- Lemma:

Falls die $k+1$ Punkte $P_i \in \mathbb{R}^n$ affin unabhängig sind $\Rightarrow k \leq n$.

- M.a.W.:

es kann nie mehr als $n+1$ affin unabhängige Punkte geben.



- Def.: **affines Koordinatensystem**

Wenn $k + 1$ Punkte $P_0, \dots, P_k \in \mathbb{R}^n$ affin unabhängig sind, so definieren sie ein **affines Koordinatensystem**.

- Def.: **affine Kombination, baryzentrische Koordinaten**

Seien $k + 1$ affin unabhängige Punkte $P_0, \dots, P_k \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Daraus kann man weitere Punkte definieren mittels einer **affinen Kombination**:

$$P = \sum_{i=0}^k \lambda_i P_i, \quad \text{mit} \quad \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

Die λ_i heißen **baryzentrische Koordinaten** von P bzgl. des Koordinatensystems $[P_0, P_1, \dots, P_k]$.

- Satz (o. Bew.):

Die Punkte $P_0, \dots, P_k \in \mathbb{R}^n$, $k \leq n$ sind **affin unabhängig** \Leftrightarrow jede affine Kombination bzgl. dieser Punkte ist eindeutig, d.h.

$$\forall s_i, t_i \in \mathbb{R} \text{ mit } \sum s_i = \sum t_i = 1 :$$

$$\sum s_i P_i = \sum t_i P_i \Leftrightarrow \forall i = 0, \dots, k : s_i = t_i$$

Erinnerung: affine Abbildungen

- Affine Abbildungen := {lineare Abbildungen + Translationen}
- **Affine Abbildung** := Abbildung, die affine Kombinationen invariant lassen, d.h.

$$P = \sum \lambda_i P_i \Leftrightarrow \phi(P) = \phi\left(\sum \lambda_i P_i\right) = \sum \lambda_i \phi(P_i)$$

- M.a.W.:
eine affine Abbildung ist eindeutig durch die Bilder der affinen Basis festgelegt.

- Definition: **konvexe Hülle**

Seien P_0, \dots, P_k Punkte (*nicht* notw.weise affin unabhängige Pkte).
 Dann ist die **konvexe Hülle** dieser Punkte definiert als:

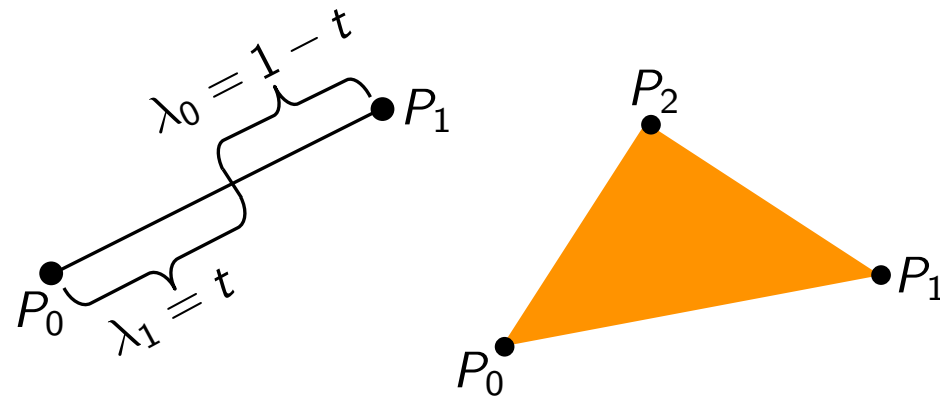
$$CH(P_0, \dots, P_k) := \left\{ P \mid P = \sum \lambda_i P_i, \sum \lambda_i = 1, \forall i : \lambda_i \geq 0 \right\}$$

In diesem Fall gilt $\forall i : 0 \leq \lambda_i \leq 1$.

Eine solche Summe heißt auch **konvexe Kombination**.

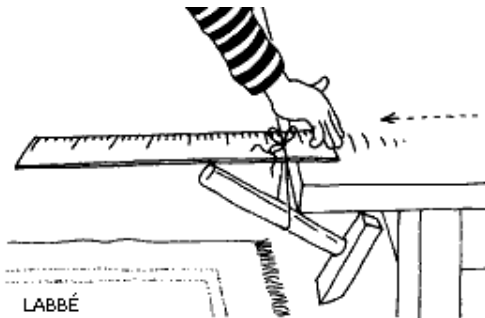
- Beispiele:

- $P_0, P_1 \rightarrow$ Strecke
- $P_0, P_1, P_2 \rightarrow$ Dreieck



Physikalische Interpretation

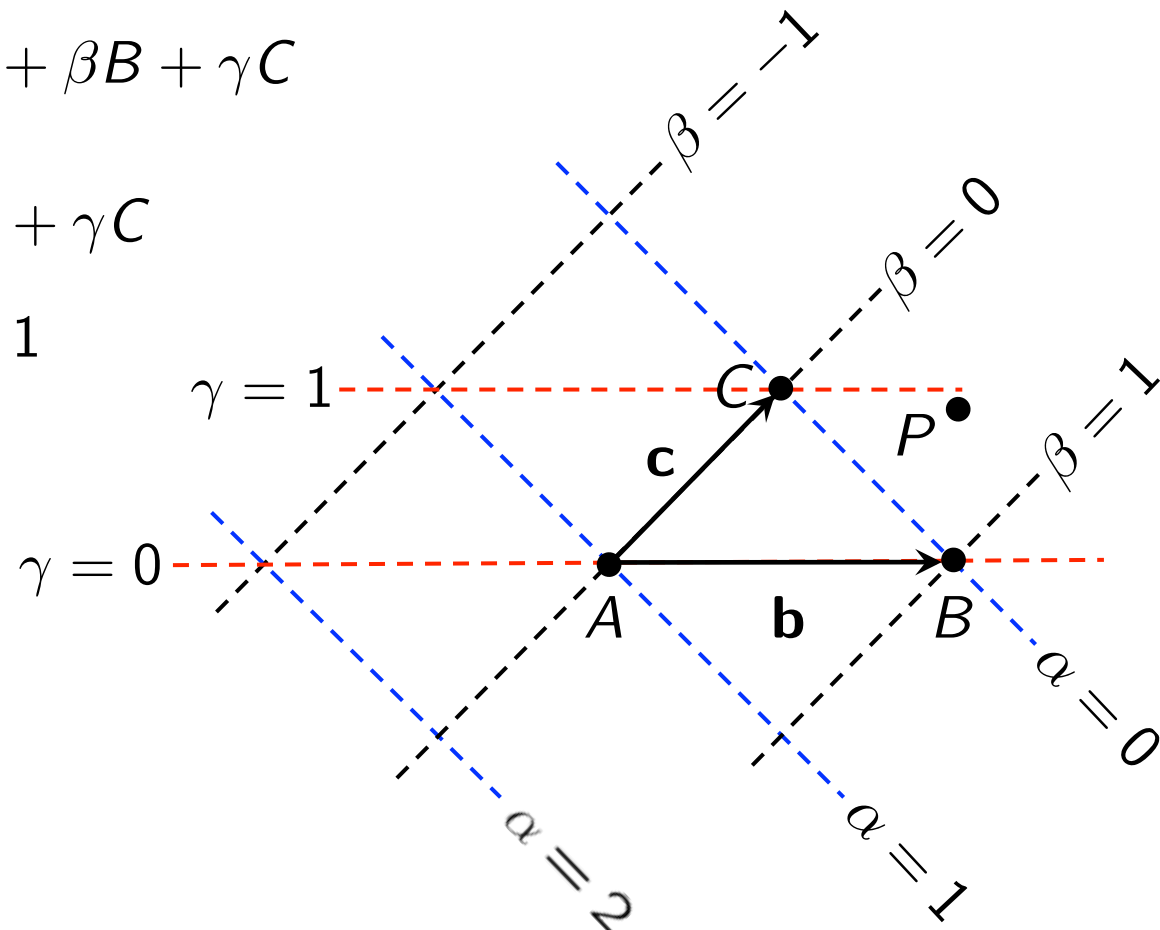
- Gegeben $k + 1$ Punkte $P_0, \dots, P_k \in \mathbb{R}^n$ mit den Massen m_i , $\sum m_i \neq 0$
- Definiere die „normierten Massen“ $\lambda_i = \frac{m_i}{\sum m_i}$
- Dann ist der Punkt $P = \sum \lambda_i P_i$ genau der **Schwerpunkt** der $k + 1$ Punkte



Beispiel: Dreieck im \mathbb{R}^n

$$\begin{aligned}
 P &= A + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} \\
 &= A + \beta (B - A) + \gamma (C - A) \\
 &= \underbrace{(1 - \beta - \gamma)}_{\alpha} A + \beta B + \gamma C \\
 &= \alpha A + \beta B + \gamma C
 \end{aligned}$$

mit $\alpha + \beta + \gamma = 1$



- Bestimme die baryzentrischen Koordinaten eines Punktes P bzgl. des Dreiecks A, B, C

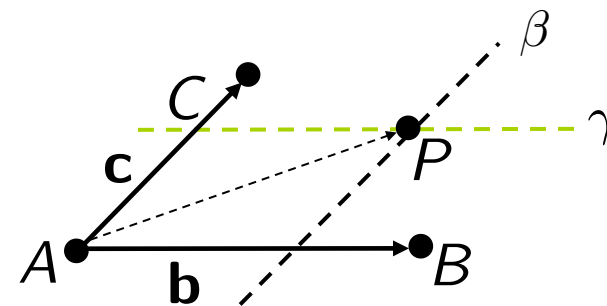
- Lösung 1:

- $$\beta (B - A) + \gamma (C - A) \stackrel{!}{=} P - A = q$$

- Löse das LGS

$$\begin{pmatrix} b_x & c_x \\ b_y & c_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix}$$

- Setze $\alpha = 1 - \beta - \gamma$



■ Lösung 2:

- Verwende Beobachtung: alle Punkte P mit dem selben Abstand von der Geraden \overline{AC} haben dieselbe baryzentrische Koordinate

- Setze $n_c := \begin{pmatrix} c_y \\ -c_x \end{pmatrix}$

$$F_{AC}(P) := \frac{n_c \cdot (P - A)}{n_c \cdot (B - A)}$$

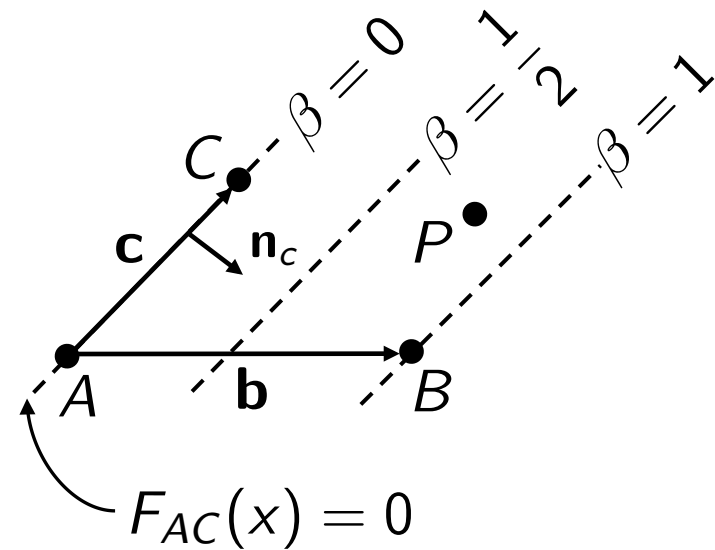
Normierung \curvearrowright

- Damit ist $F_{AC}(A) = F_{AC}(C) = 0,$

$$F_{AC}(B) = 1 \quad (\text{wegen Normierung})$$

- Definiere analog F_{AB} und F_{BC}

- Damit ist $\alpha = F_{BC}(P), \beta = F_{AC}(P), \gamma = F_{AB}(P)$

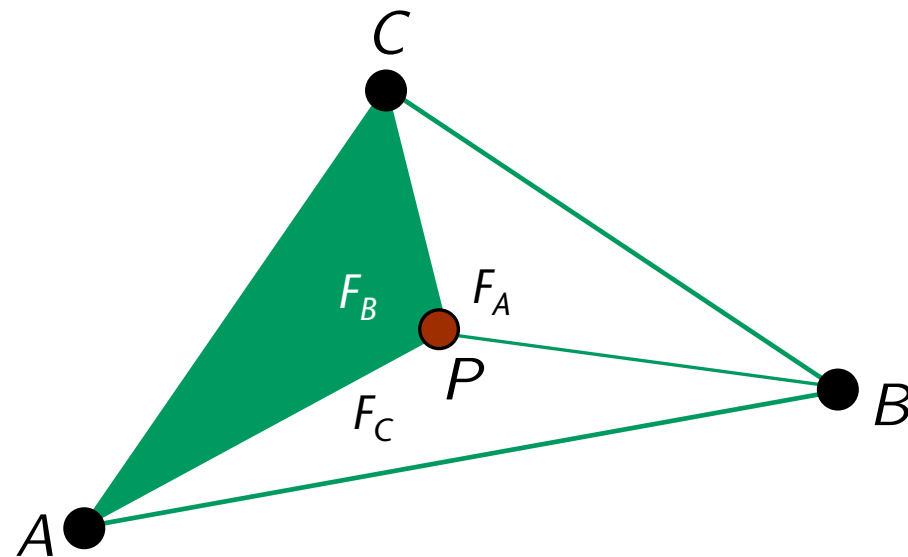


■ Lösung 3:

- Nutze den geometrischen Zusammenhang zwischen Flächeninhalten und baryzentrische Koordinaten:

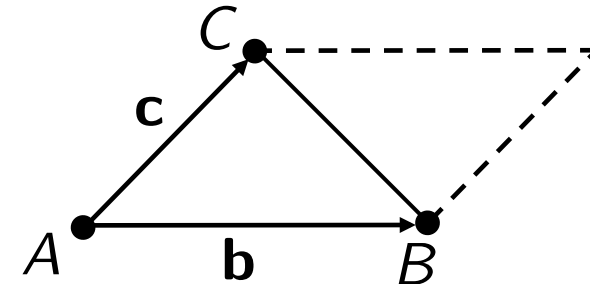
$$\alpha = \frac{F_A}{F} \quad \beta = \frac{F_B}{F} \quad \gamma = \frac{F_C}{F}$$

$$F = F_A + F_B + F_C$$



- Flächeninhalt eines Dreiecks A, B, C

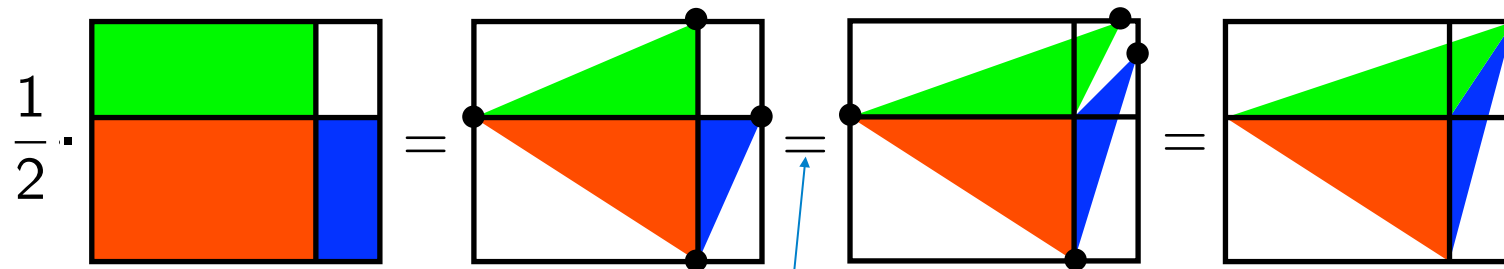
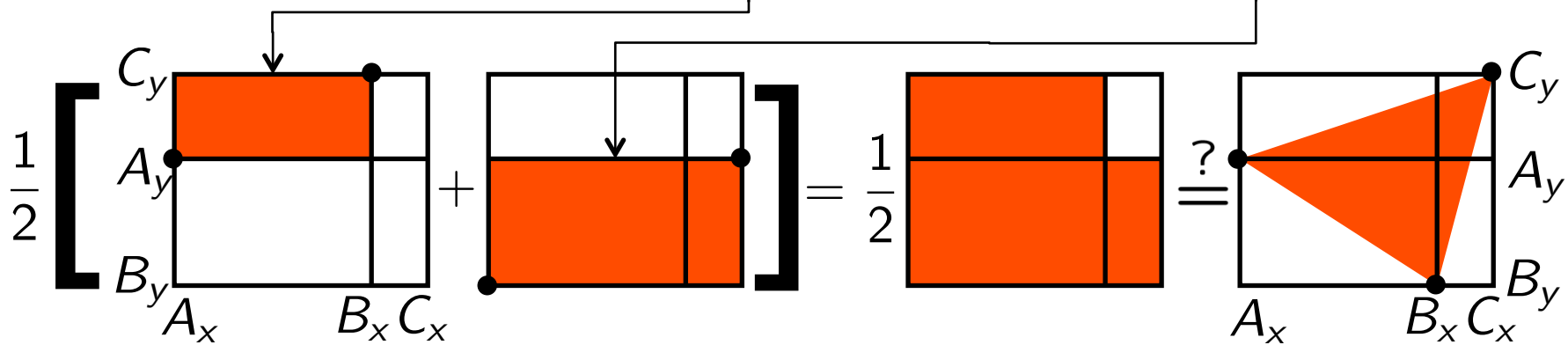
$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(\Delta ABC) &= \frac{1}{2} \|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\| \\
 &= \frac{1}{2} \|(B - A) \times (C - A)\| \\
 &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} B_x - A_x & C_x - A_x \\ B_y - A_y & C_y - A_y \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$



- Achtung: Achte auf den korrekten Umlaufsinn !!
- Beobachtung: Flächeninhalt = 0 \Leftrightarrow Det = 0 \Leftrightarrow Dreieck ist degeneriert \Leftrightarrow Punkte sind nicht affin unabhängig

- Zu zeigen:

$$\mathcal{F}(\Delta ABC) = \frac{1}{2} [(B_x - A_x)(C_y - A_y) - (C_x - A_x)(B_y - A_y)]$$



denn $\mathcal{F}(\text{Dreieck}) = \frac{1}{2} \cdot \text{Basis} \cdot \text{Höhe}$

- Gegeben sei A, B, C ein Dreieck, und darin ein Dreieck P, Q, R
- Die baryzentrischen Koordinaten von P, Q, R bzgl. A, B, C seien

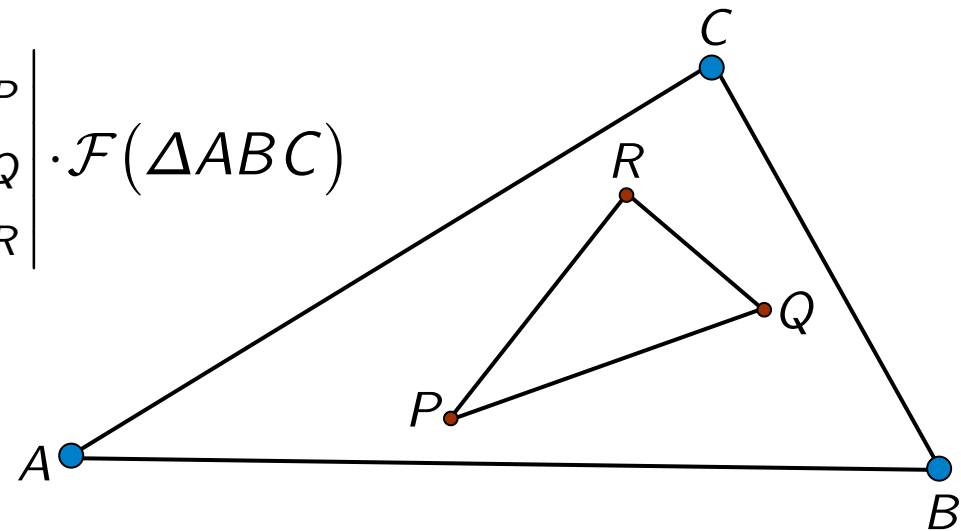
$$P : (\alpha_P, \beta_P, \gamma_P) \quad Q : (\alpha_Q, \beta_Q, \gamma_Q) \quad R : (\alpha_R, \beta_R, \gamma_R)$$

d.h.

$$P = \alpha_P A + \beta_P B + \gamma_P C$$

- Wir beweisen den etwas allgemeineren Satz:

$$\mathcal{F}(\Delta PQR) = \begin{vmatrix} \alpha_P & \beta_P & \gamma_P \\ \alpha_Q & \beta_Q & \gamma_Q \\ \alpha_R & \beta_R & \gamma_R \end{vmatrix} \cdot \mathcal{F}(\Delta ABC)$$



- Zur Erinnerung: Determinanten sind linear, d.h.

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{sa} + t\mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = s \cdot \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} + t \cdot \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

- Damit braucht man $\mathcal{F}(\Delta PQR)$ nur noch ausrechnen:

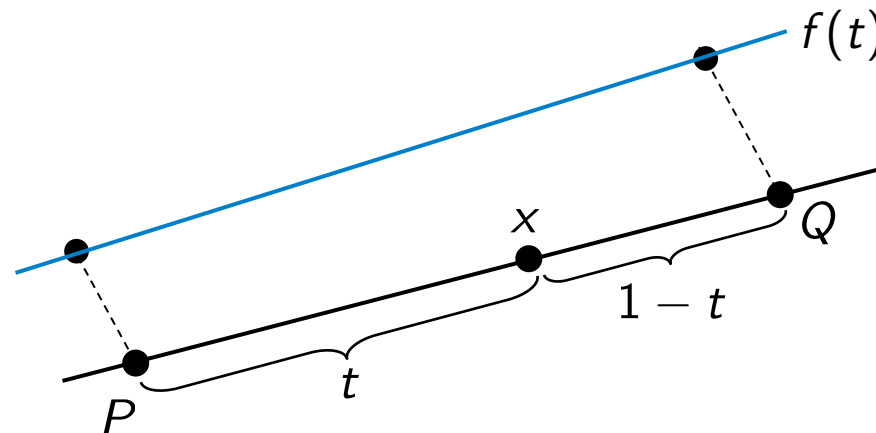
$$2\mathcal{F}(\Delta PQR) =$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_P A_x + \beta_P B_x + \gamma_P C_x & \alpha_Q A_x + \beta_Q B_x + \gamma_Q C_x & \alpha_R A_x + \beta_R B_x + \gamma_R C_x \\ \alpha_P A_y + \beta_P B_y + \gamma_P C_y & \alpha_Q A_y + \beta_Q B_y + \gamma_Q C_y & \alpha_R A_y + \beta_R B_y + \gamma_R C_y \\ \underbrace{\alpha_P + \beta_P + \gamma_P}_1 & \alpha_Q + \beta_Q + \gamma_Q & \alpha_R + \beta_R + \gamma_R \end{vmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 &= \alpha_P \cdot \begin{vmatrix} A_x & \dots \text{s. eq. (1)} \dots & \dots \\ A_y & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots \end{vmatrix} + \beta_P \cdot \begin{vmatrix} B_x & \dots & \dots \\ B_y & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots \end{vmatrix} + \gamma_P \cdot \begin{vmatrix} C_x & \dots & \dots \\ C_y & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots \end{vmatrix} \\
 &= \alpha_P \cdot \left(\underbrace{\alpha_Q \begin{vmatrix} A_x & A_x & \dots \\ A_y & A_y & \dots \\ 1 & 1 & \dots \end{vmatrix}}_0 + \beta_Q \begin{vmatrix} A_x & B_x & \dots \\ A_y & B_y & \dots \\ 1 & 1 & \dots \end{vmatrix} + \gamma_Q \begin{vmatrix} A_x & C_x & \dots \\ A_y & C_y & \dots \\ 1 & 1 & \dots \end{vmatrix} \right) \\
 &+ \beta_P \cdot \left(\alpha_Q \begin{vmatrix} B_x & A_x & \dots \\ B_y & A_y & \dots \\ 1 & 1 & \dots \end{vmatrix} + \underbrace{\beta_Q \begin{vmatrix} B_x & B_x & \dots \\ B_y & B_y & \dots \\ 1 & 1 & \dots \end{vmatrix}}_0 + \gamma_Q \begin{vmatrix} B_x & C_x & \dots \\ B_y & C_y & \dots \\ 1 & 1 & \dots \end{vmatrix} \right) \\
 &+ \gamma_P \cdot \left(\alpha_Q \begin{vmatrix} C_x & A_x & \dots \\ C_y & A_y & \dots \\ 1 & 1 & \dots \end{vmatrix} + \beta_Q \begin{vmatrix} C_x & B_x & \dots \\ C_y & B_y & \dots \\ 1 & 1 & \dots \end{vmatrix} + \underbrace{\gamma_Q \begin{vmatrix} C_x & C_x & \dots \\ C_y & C_y & \dots \\ 1 & 1 & \dots \end{vmatrix}}_0 \right) \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

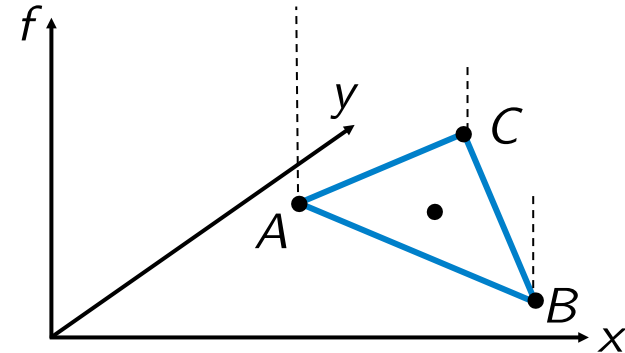
Erinnerung: lineare Interpolation

- Sei ein skalarer Wert f an P, Q vorgegeben: $f(P)=f_1, f(Q)=f_2$
- Dann kann man jedem Punkt X auf der Geraden \overline{PQ} einen Wert $f(X)$ zuordnen
- Sei t der Parameter von X , also $f(X) = (1 - t) \cdot f(P) + t \cdot f(Q)$
- Dann setze $X = (1 - t) \cdot P + t \cdot Q$

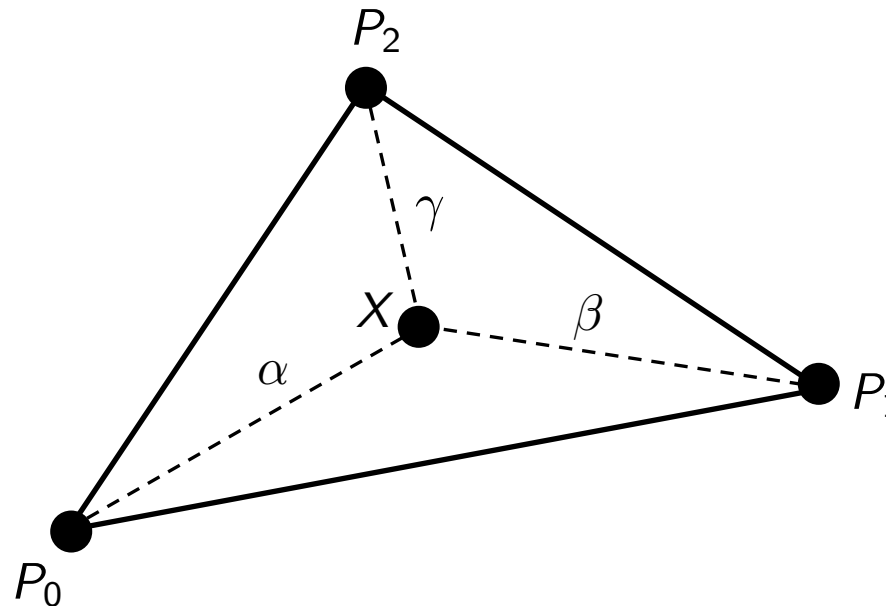


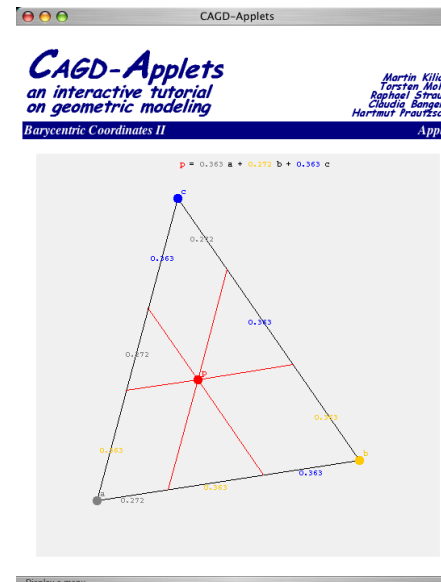
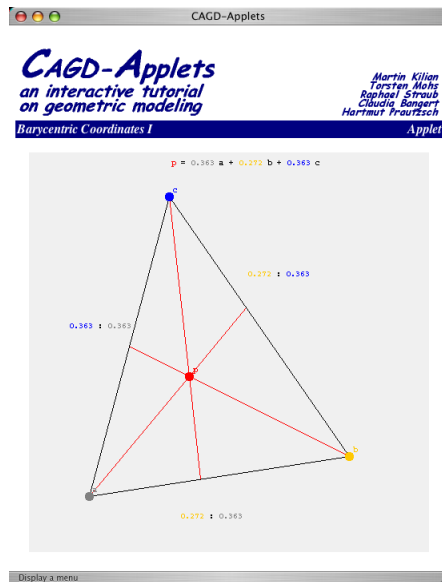
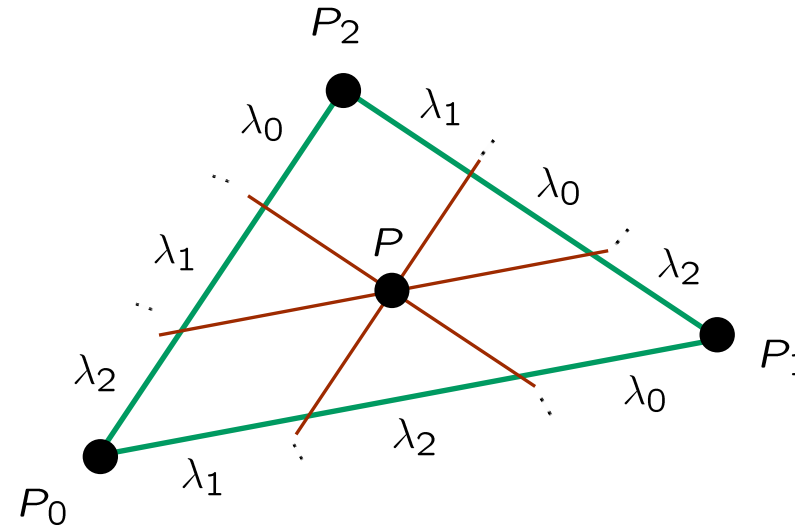
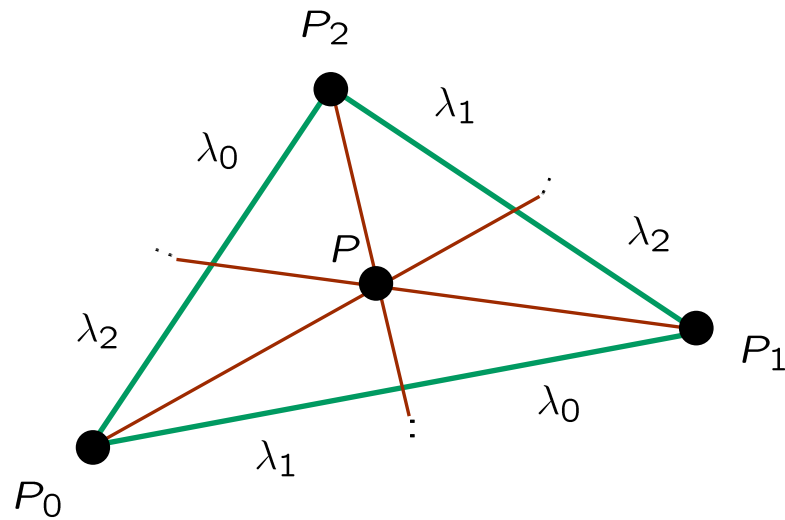
Anwendung: Baryzentrische Interpolation

- Gegeben: "Höhen" f_A, f_B, f_C an den Punkten A, B, C (z.B. Grauwerte)
- Gesucht: Funktion f , so daß f_A, f_B, f_C interpoliert werden
- Idee: für einen beliebigen Punkt X , bestimme dessen baryzentrische Koordinaten, interpoliere damit die Funktionswerte
- Konkret: Sei $X = \alpha A + \beta B + \gamma C$
- Setze $f(X) = \alpha f_A + \beta f_B + \gamma f_C$
- Funktioniert auch für X außerhalb $\triangle ABC$
- Funktioniert auch für $f_A, f_B, f_C \in \mathbb{R}^m$
- Bem.: Auf den Kanten entspricht dies gerade einer linearen Interpolation



- Der Punkt X ist im Inneren des Dreiecks $\Leftrightarrow \alpha, \beta, \gamma > 0$

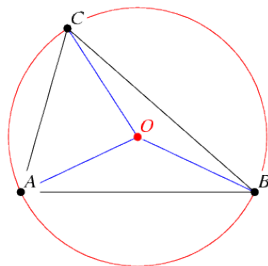




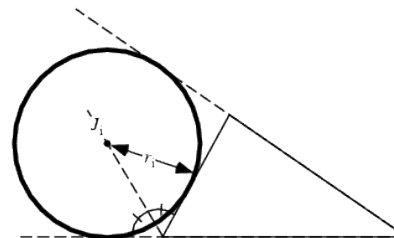
<http://i33www.ibds.uni-karlsruhe.de/applets/>

- Viele spezielle Punkte im Dreieck lassen sich mittels baryzentrischer Koordinaten sehr leicht angeben / ausrechnen (o. Bew.):

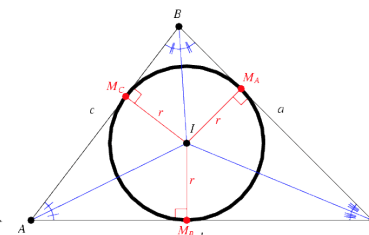
Punkt	α	β	γ
Schwerpkt.	1	1	1
Außenkreis zu A	$-a$	b	c
Inkreis	a	b	c
Umkreis	$a^2(b^2 + c^2 - a^2)$	$b^2(c^2 + a^2 - b^2)$	$c^2(a^2 + b^2 - c^2)$



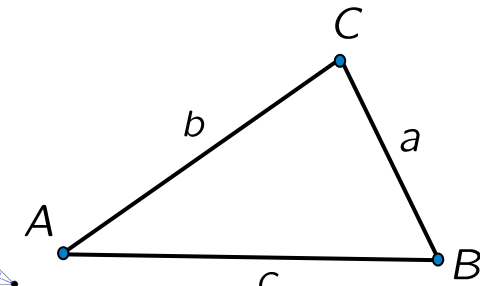
Umkreis



Außenkreis



Inkreis



Bezeichnungen

- Achtung: die Koordinaten sind ohne Normierung angegeben (sog. "**homogene baryzentrische Koord.**") – die muß man also vor einer tatsächlichen Berechnung noch durchführen

